Резонансное ускорение частицы наклонной электромагнитной волной

А. А. Васильев, А. И. Нейштадт, А. В. Артемьев

ИКИ РАН, Москва

"Физика плазмы в Солнечной системе", 6-10 февраля 2012 г.

1. Постановка задачи
2. Приведение к стандартному виду
3. Динамика в фазовом пространстве

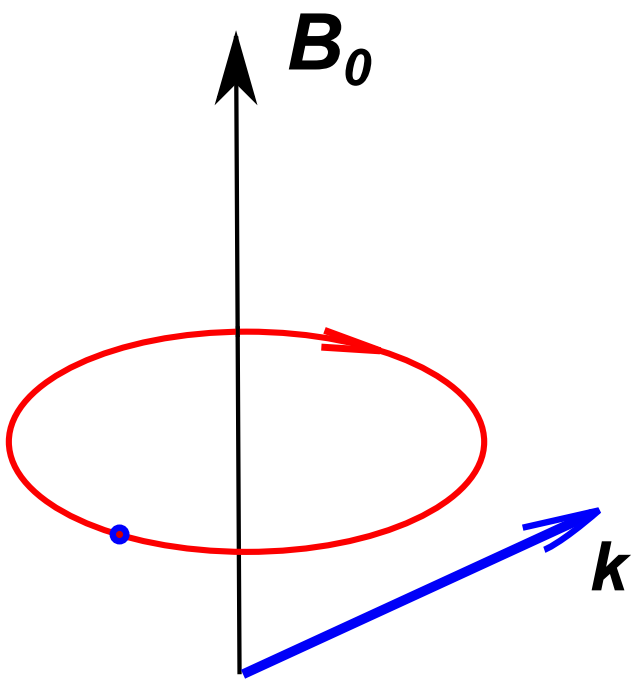
Постановка задачи

Однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ и наклонно распространяющаяся плоская электромагнитная волна с волновым вектором $\mathbf{k} = (k_1, 0, k_3)$.

Векторный потенциал:

$\mathbf{A} = \left(0,\, B_0 q_1 - \frac{B}{k}\sin(\mathbf{kq} - \omega t),\, 0\right)$, где $k = (k_1^2 + k_3^2)^{1/2}$.

Введем канонический импульс $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, где $\hat{\mathbf{p}}$ – импульс частицы. Гамильтониан системы имеет вид $H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$.



Безразмерные переменные

$\omega_0 = eB/(mc)$, $\Omega_0 = eB_0/(mc)$, $\bar{H} = H/(m\omega_0^2 R_0^2)$, где R_0 – характерный ларморовский радиус в поле $\mathbf{B}_0$

$$\varepsilon = \frac{1}{kR_0},\ \bar{k}_i = \varepsilon\frac{R_0\omega_0}{\Omega_0}k_i,\ \bar{\omega} = \varepsilon\frac{\omega}{\Omega_0},$$
$$\bar{q}_i = \frac{\Omega_0 q_i}{\omega_0 R_0},\ \bar{p}_i = \frac{p_i}{m\omega_0 R_0},\ \bar{t} = \Omega_0 t.$$

$\varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Гамильтониан не содержит q_2, поэтому $p_2 = \mathrm{const}$. Выбором начала отсчета q_1 можно добиться, что $p_2 = 0$ (т.е. $q_1 = \hat{p}_2 + O(\varepsilon)$). Безразмерный гамильтониан:

$$H = \tfrac{1}{2}(\mathbf{p},\mathbf{p}) + \tfrac{1}{2}q_1^2 + \\ -q_1\varepsilon\sin\tfrac{1}{\varepsilon}(\mathbf{kq} - \omega t) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\tfrac{1}{\varepsilon}(\mathbf{kq} - \omega t)$$

Парами канонически сопряженных переменных являются (p_i, q_i), $i = 1, 3$.

Перенормируем время: $\hat{t} = \varepsilon^{-1} t$.
Введем новые канонические переменные I, φ, p, q :

$$\varphi = \varepsilon^{-1}(k_1 q_1 + k_3 q_3 - \omega t),\ I = p_3/k_3,\ p = p_1 - k_1 I,\ q = q_1$$

Гамильтониан в новых переменных:

$$\begin{aligned} &H = H_0 + \varepsilon H_1 = \\ &-\omega I + \tfrac{1}{2}\left[(p + Ik_1)^2 + (Ik_3)^2 + q^2\right] - \varepsilon q \sin\varphi, \end{aligned}$$

парами канонически сопряженных переменных являются $(p, \varepsilon^{-1} q)$ и (I, φ).
В пространстве (p, q, I) движение происходит вблизи эллипсоида $H_0 = \mathrm{const}$.

Уравнения движения

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = -\omega + k_1(p + Ik_1) + Ik_3^2,$$
$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \varepsilon q \cos\varphi,$$
$$\dot{p} = -\varepsilon\frac{\partial H}{\partial q} = -\varepsilon q + \varepsilon^2 \sin\varphi,$$
$$\dot{q} = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p} = \varepsilon(p + Ik_1)$$

Быстрая переменная φ, можно по ней усреднить.
Условие резонанса $\dot{\varphi} = 0$ определяет резонансную плоскость $k_1 p = \omega - k^2 I$ в пространстве (p, q, I). Вдали от этой плоскости усреднение по быстрой фазе φ показывает, что влияние волны мало, и траектория частицы близка к ларморовской (на которой $I = \text{const}$).

Разложение гамильтониана вблизи резонанса

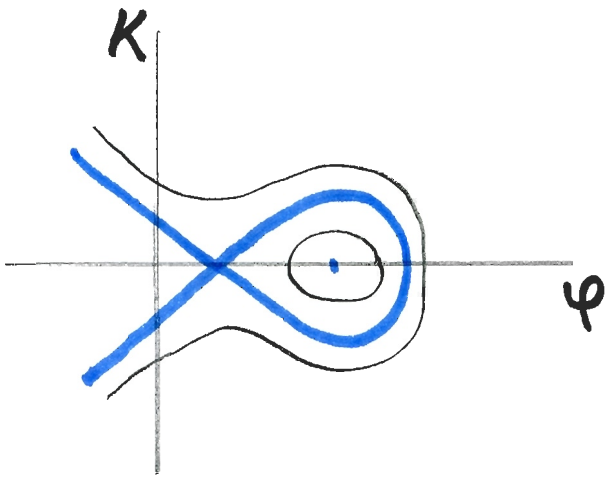
Введем $I_R(p,q) = (\omega - k_1 p)/k^2$ – значение I на резонансной плоскости. Обозначая $K = I - I_R(p,q)$, получаем в главном приближении

$$H = \Lambda(p,q) + \mathcal{F}(K,\varphi;q),$$
$$\Lambda(p,q) = H_0|_{I=I_R} = \frac{q^2}{2} + \frac{p}{k^2}\left(p\frac{k_3^2}{2} + \omega k_1\right),$$
$$\mathcal{F}(K,\varphi;q) = \frac{1}{2}k^2K^2 - \varepsilon q\sin\varphi + \varepsilon q\frac{k_1}{k^2}\varphi$$

Пары сопряженных переменных – $(p, \varepsilon^{-1}q)$ и (K,φ). Медленная эволюция переменных p,q определяется гамильтонианом Λ, а изменение K и φ задается маятникоподобным гамильтонианом $\mathcal{F}$, который зависит от q как от медленно меняющегося параметра.

Маятникоподобный гамильтониан

Если $k_1/k^2 < 1$, на фазовом портрете маятникоподобной системы на плоскости (K, φ) имеется сепаратриса.
Площадь, ограниченная сепаратрисой: $S \propto \sqrt{\varepsilon|q|}$.
Если эта площадь растет в ходе движения, существует ненулевая вероятность $\Pi \sim \sqrt{\varepsilon}$ захвата в резонанс на одном ларморовском периоде. Захваченная частица покидает окрестность ларморовской траектории $I = \text{const}$ и движется таким образом, чтобы оставалось выполненным условие резонанса.

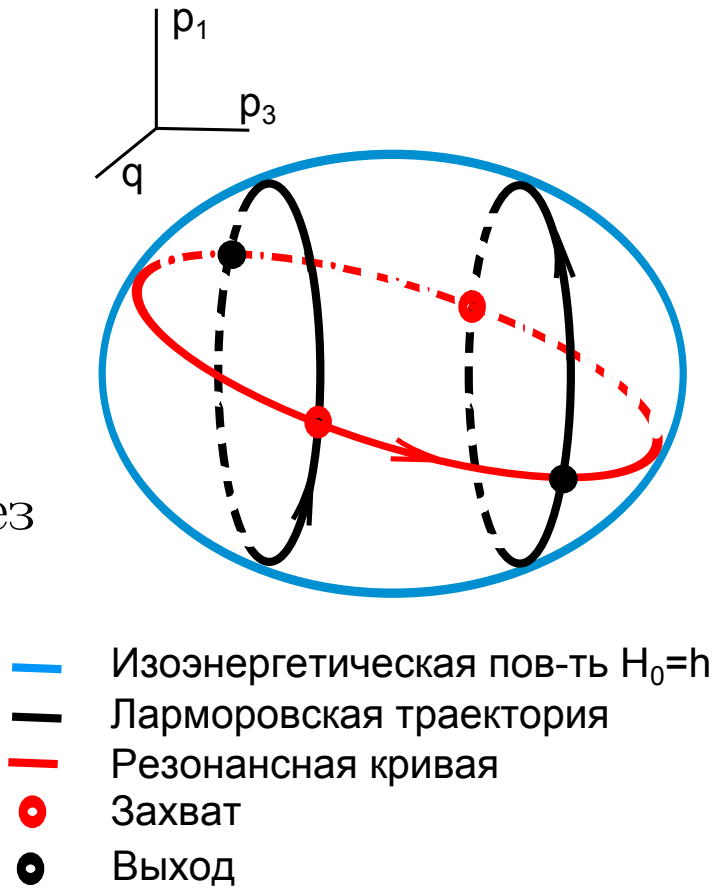


Геометрия фазового пространства

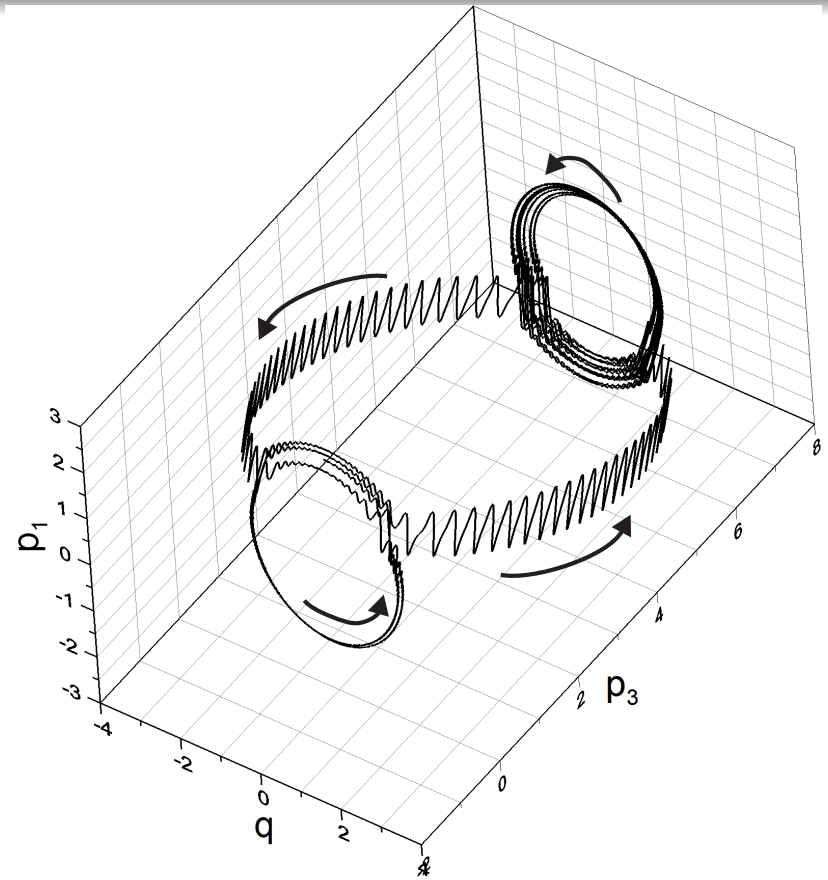
Изоэнергетическая поверхность в пространстве переменных (q, p_1, p_3):

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q^2 + p_3^2) - \frac{\omega}{k_3} p_3 = h.$$

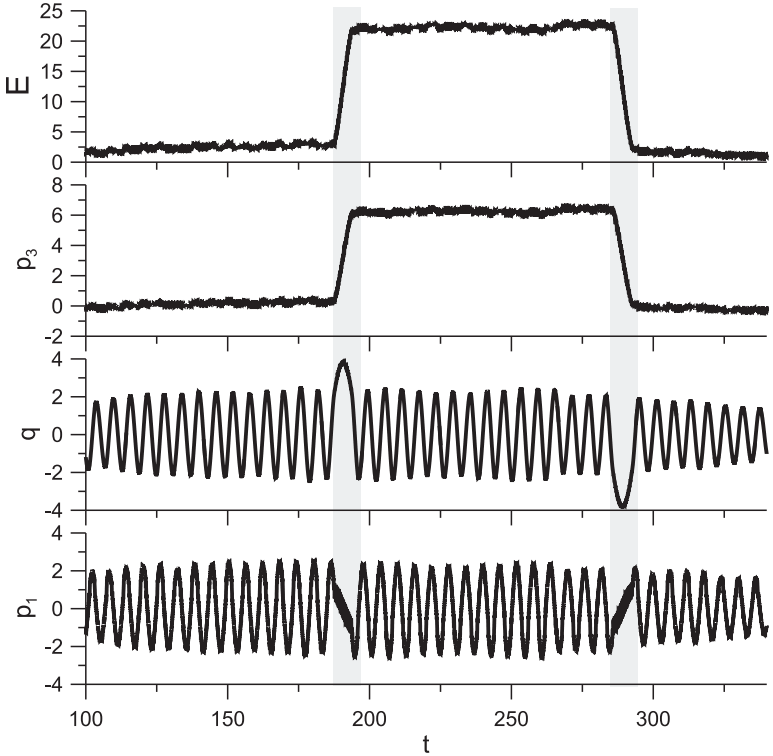
это сфера с центром в точке $q = 0$, $p_1 = 0$, $p_3 = \omega/k_3$. Резонансная плоскость $\omega - k_1 p_1 - k_3 p_3 = 0$ проходит через центр этой сферы. Пересечение этих двух поверхностей представляет собой резонансную кривую, в данном случае - окружность. Ларморовским окружностям соответствуют пересечения изоэнергетической поверхности с плоскостями $I = p_3/k_3 = \text{const}$.



Фазовая траектория частицы



Фазовая траектория в пространстве (q, p_1, p_3). Стрелками показано направление движения.



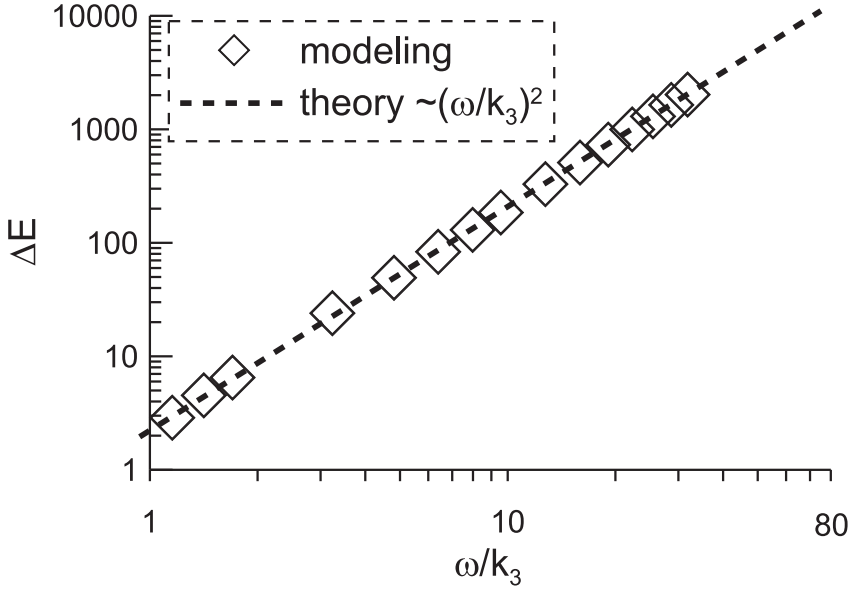
Энергия частицы, компоненты импульса и координата q как функции времени вдоль траектории.

Изменение энергии захваченной частицы

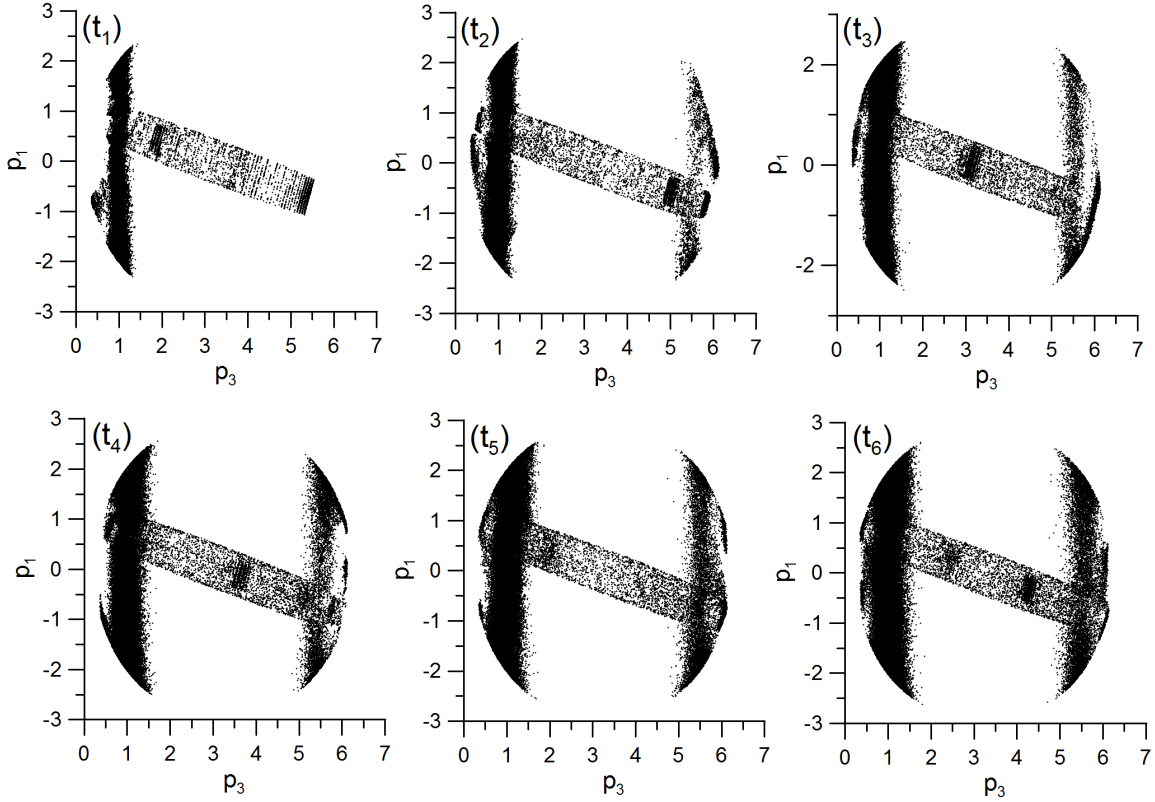
Кинетическая энергия частицы: $E = (p_1^2 + q^2 + p_3^2)/2$
Ее изменение, связанное с захватом в резонанс, равно

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta(p_3^2) = 2\frac{\omega}{k_3}\left(\frac{\omega}{k_3} - p_3^{(0)}\right)$$

После выхода из резонанса вся эта энергия оказывается аккумулирована в продольной компоненте движения частицы.

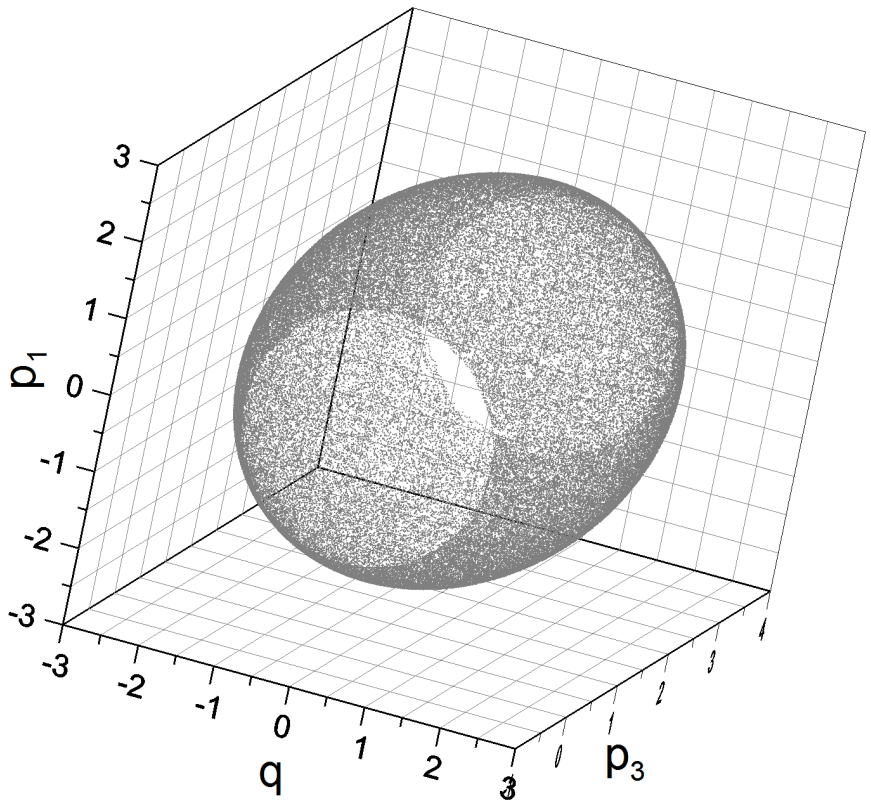


Эволюция распределения частиц по скоростям



Временная эволюция распределения 10^6 частиц в пространстве компонент импульса (p_1, p_3). Рисунки соответствуют моментам времени $t_i = 60i$, $i = 1...6$.

Рассеяние на резонансе



Отображение последования в пространстве (q, p_1, p_3) с периодом, равным $2\pi/\omega$, для длинной траектории, многократно пересекающей резонансную поверхность.

Публикация результатов

A.A.Vasiliev, A.I.Neishtadt, and A.V.Artemyev, Nonlinear dynamics of charged particles in an oblique electromagnetic wave, Physics Letters **A 375**, 3075-3079 (2011).