

# Рассеяние свистовых волн на неоднородностях плотности в ионосфере и выход волны на Землю

Кузичев И. В.

Институт космических исследований РАН, Москва, Россия.

# Введение

Одним из важных вопросов, касающихся ОНЧ волн, которые распространяются в магнитосфере и ионосфере Земли в свистовой моде, является выход волны на Землю. ОНЧ волны, возникающие в результате молниевых разрядов или являющиеся излучением наземных ОНЧ-передатчиков, экспериментально регистрируются на Земле приблизительно в магнитосопряженной с источником излучения точке. В магнитосфере Земли низкочастотная свистовая волна распространяется с групповой скоростью, направление которой мало отклоняется от геомагнитного поля. В то же время, при падении на ионосферу волновой вектор волны обычно составляет довольно большой угол с нормалью к поверхности Земли. Однако из анализа уравнений для электромагнитного поля в ОНЧ-диапазоне следует, что на Землю могут выйти лишь те волны, которые падают на ионосферу почти вертикально. Таким образом, для объяснения экспериментального наблюдения ОНЧ волн на Земле требуется некоторый механизм, приводящий к появлению в спектре излучения соответствующих волновых векторов. Одним из возможных механизмов является рассеяние волны на мелкомасштабных флуктуациях плотности в магнитосфере и ионосфере.

# Свистовые волны. Дисперсионное уравнение

$$A N^4 + B N^2 + C = 0; \quad N = \frac{k c}{\omega};$$

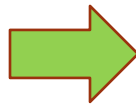
$$A, B, C = A, B, C(\epsilon_{ij}, \cos \theta); \quad \epsilon_{ij} - \text{диэлектрический тензор};$$

$$\theta = \angle(\vec{k}, \vec{B}_0); \quad \vec{B}_0 - \text{внешнее магнитное поле.}$$

Общее дисперсионное уравнение в холодной магнитоактивной плазме.



Свистовый интервал частот. Дисперсионное уравнение для свистов

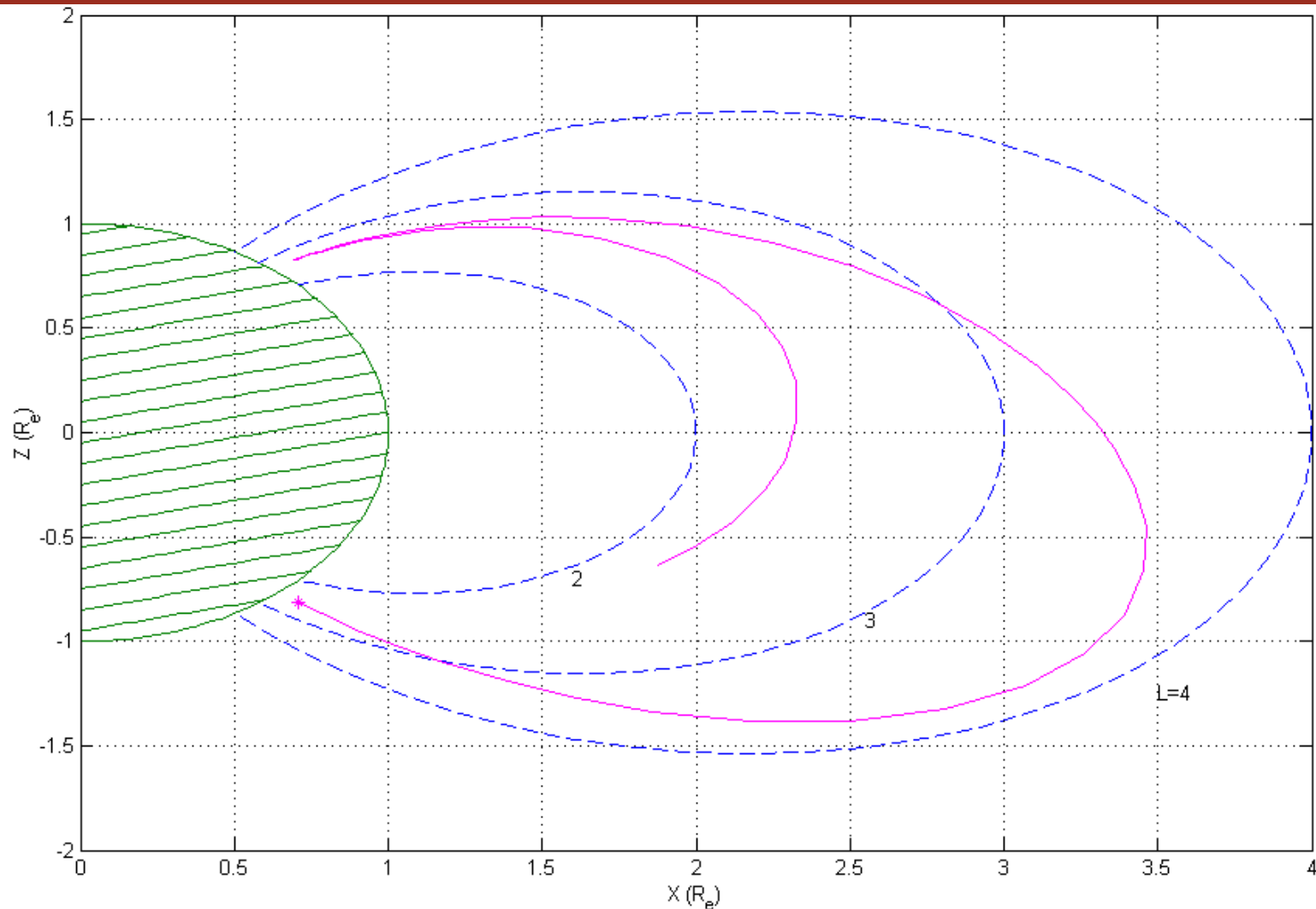


$$\omega_{Hi}^2 \ll \omega^2 < \min\{\omega_p^2, \omega_c^2\}; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m};$$

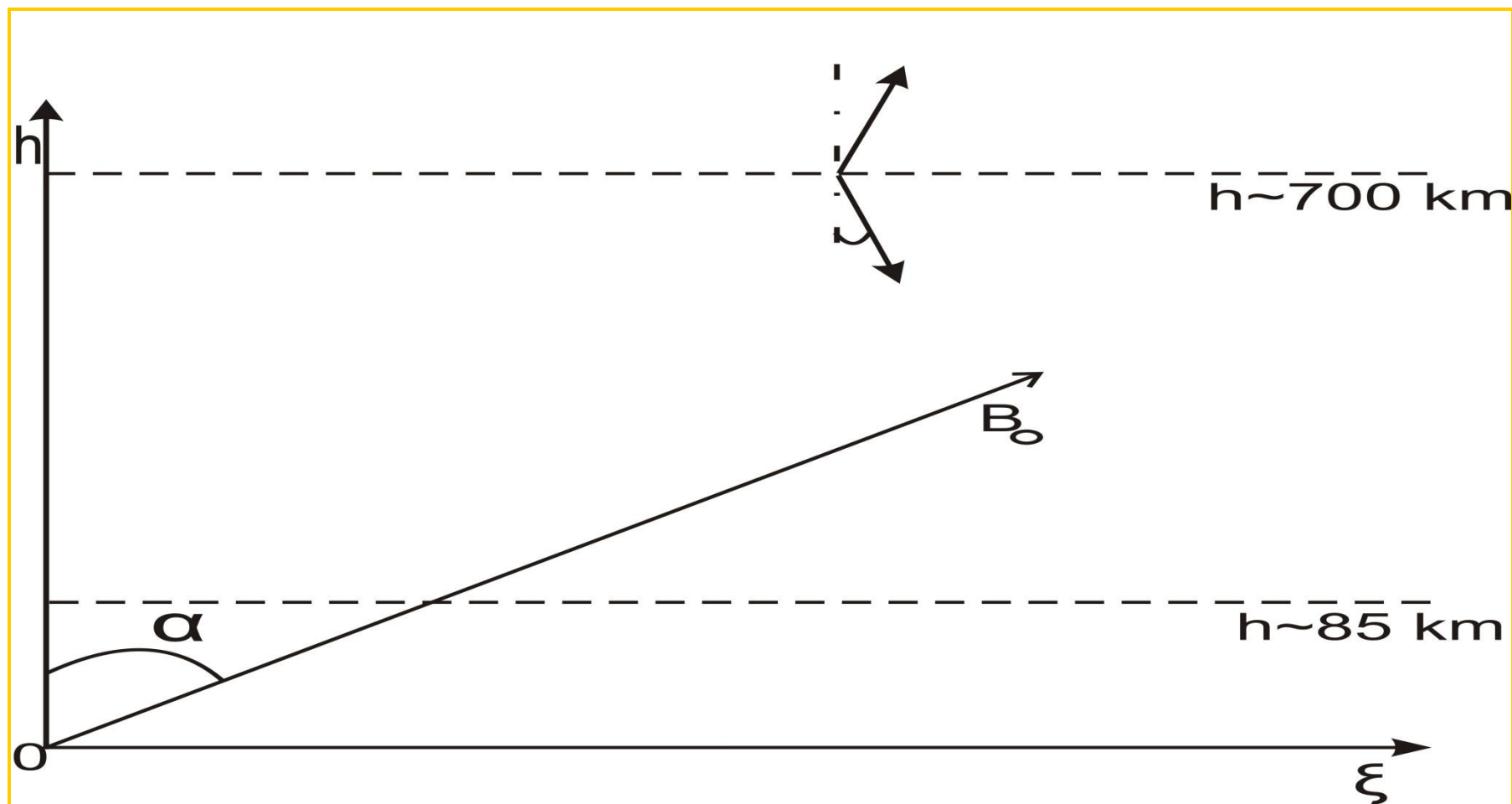
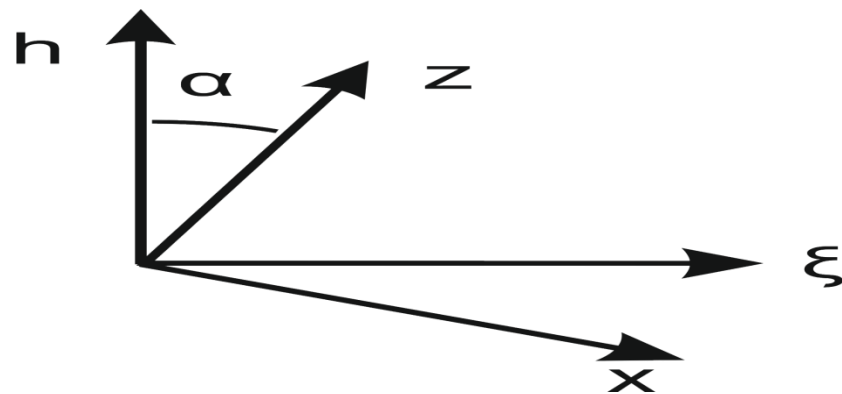
$$N^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c |\cos \theta| - \omega)}; \quad \omega_c = \frac{e B_0}{m c}.$$

В ионосфере и магнитосфере Земли этому интервалу частот принадлежит килогерцовый диапазон частот:  $\sim 1\text{-}30$  кГц.

# Характерная траектория свистовой волны в магнитосфере

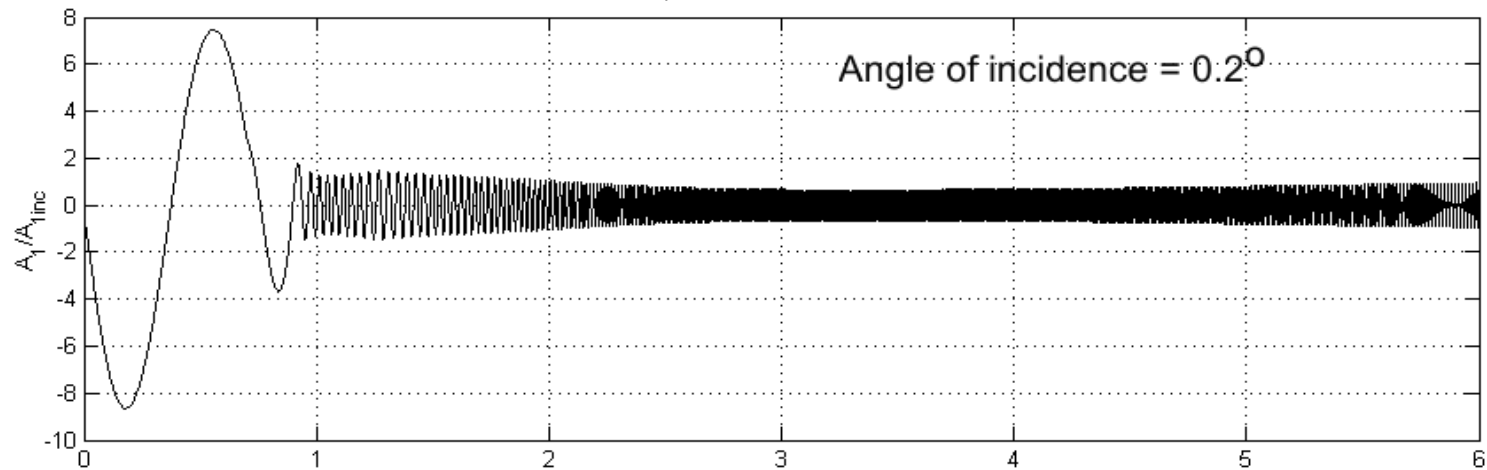


# Конус прохождения

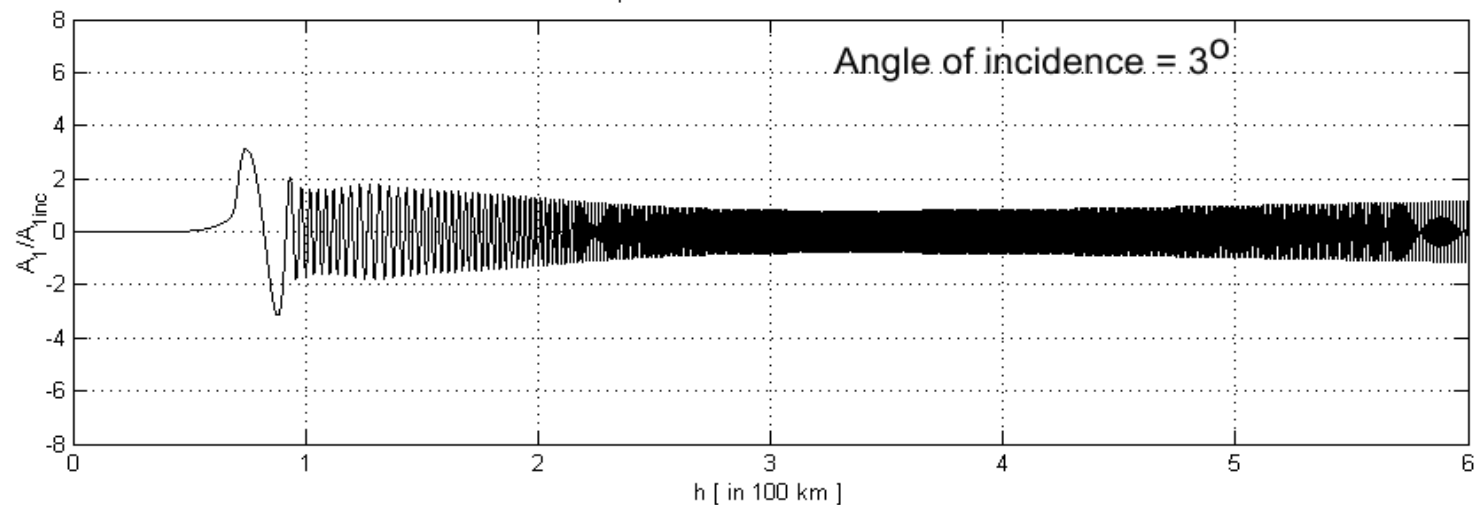


# Распространение внутри и вне конуса прохождения

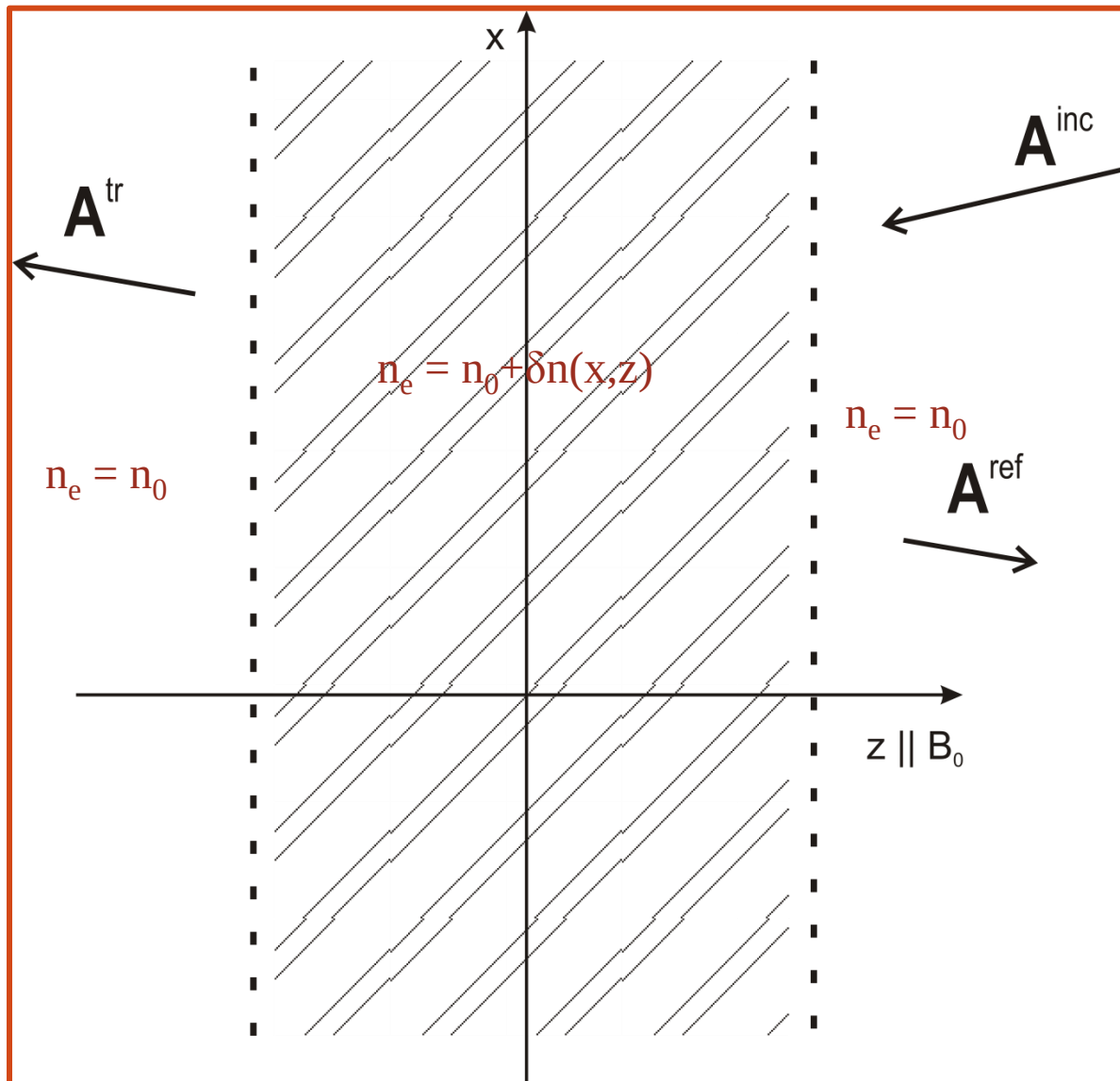
The field component  $A_1$  in the case when a wave reaches the ground



The field component  $A_1$  in the case when a wave does not reach the ground



# Геометрия задачи



Область с флуктуациями ограничена по оси  $z$ , но может быть бесконечной вдоль оси  $x$ .

Плоскость  $(x, z)$  содержит волновой вектор падающей волны. Параметры среды и, следовательно, поля предполагаются не зависящими от координаты  $y$ .

Волна падает из  $z \rightarrow +\infty$

Соответственно, при  $z \rightarrow -\infty$  есть только прошедшая волна, а на  $z \rightarrow +\infty$  добавляется еще отраженная волна.

# Основные уравнения

Рассматривается стационарная задача, электромагнитное поле описывается комплексным вектор-потенциалом  $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,z)$ , который удовлетворяет уравнениям Максвелла в среде.

$$\text{rot rot } \mathbf{A}(x, z) = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A}(x, z) \quad (1);$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i \varepsilon_2 & 0 \\ -i \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\varepsilon_1}{c^2} = \frac{\omega_p^2 + \omega_c^2}{c^2 \omega_c^2} - \frac{\omega_p^2 + \omega_c^2}{c^2 \omega_c^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega^2} \equiv \zeta;$$

$$\frac{\varepsilon_2}{c^2} = -\frac{\omega_p^2}{c^2 \omega_c \omega} \equiv -\frac{\gamma}{\omega^2}; \quad \frac{\varepsilon_3}{c^2} = -\frac{\omega_p^2}{c^2 \omega^2} \equiv -\frac{\eta}{\omega^2};$$

D.R. Shklyar, H. Washimi, J. Geophys. Res., 99, 23, 695, 1994.



С учетом флуктуаций плотности,  $n_e = n_0 + \delta n(x, z)$ , перепишем (1) так, чтобы нерегулярные слагаемые оказались в правой части уравнения.

$$\mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \zeta_0 & -i\omega\gamma_0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ i\omega\gamma_0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \zeta_0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta_0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \delta \zeta & i\omega \delta \gamma & 0 \\ -i\omega \delta \gamma & -\omega^2 \delta \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \eta \end{pmatrix}.$$

Граничные условия (асимптотические) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, z \rightarrow +\infty) &\rightarrow \mathbf{A}^{inc}(x, z) + \int \frac{dp}{2\pi} r(p) \mathbf{a}^{(1)}(p) e^{iq_r(p)z + ipx}; \\ \mathbf{A}(x, z \rightarrow -\infty) &\rightarrow \int \frac{dp}{2\pi} t(p) \mathbf{a}^{(2)}(p) e^{-iq_r(p)z + ipx}. \end{aligned}$$

Где  $(\mathbf{a}^{(1)}(p), \mathbf{a}^{(2)}(p))$  – поляризационные вектора отраженной и падающей волны, а  $q_r(p) > 0$  – один из корней дисперсионного уравнения  $\det M(p, q) = 0$ , вторым корнем (отличающимся не знаком) которого является  $q = i q_i(p)$ ,  $q_i(p) > 0$

$$\mathbf{M}(p, q) = \begin{pmatrix} -q^2 + \omega^2 \zeta_0 & -i\omega\gamma_0 & pq \\ i\omega\gamma_0 & -p^2 - q^2 + \omega^2 \zeta_0 & 0 \\ pq & 0 & -p^2 - \eta_0 \end{pmatrix}.$$

# Закон сохранения энергии

Из уравнения (2) можно вывести закон сохранения энергии, который с помощью коэффициентов отражения и прохождения записывается в следующем виде

$$\int \frac{dp}{2\pi} (|r(p)|^2 v_1(p) + |C^{inc}(p)|^2 v_2(p)) = \int \frac{dp}{2\pi} |t(p)|^2 v_2(p)$$

где  $v_1(p)$ ,  $v_2(p)$  – групповые скорости, определяемые соотношениями

$$v_\lambda(p) = -\left(\mathbf{a}^{(\lambda)}(p), \mathbf{D}^{(\lambda)}(p) \mathbf{a}^{(\lambda)}(p)\right)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2q_\lambda(p) & 0 & p \\ 0 & -2q_\lambda(p) & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$q_\lambda(p) = \pm q_r(p)$$

а  $C^{inc}(p)$  – амплитуда падающей волны.

# Функция Грина

Поскольку мы предполагаем решать задачу методом последовательных приближений, удобно свести дифференциальное уравнение (2) к интегральному, для чего воспользуемся методом функции Грина.

$$\mathbf{A}(x, z) = \mathbf{A}^{inc} + \int dx' dz' \mathbf{G}(x - x', z - z') \mathbf{R}(x', z') \mathbf{A}(x', z'); \quad (3)$$

$$\mathbf{G}(x, z) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \mathbf{G}(p, q) \exp(i p x + i q z);$$

$$\mathbf{G}(p, q) = (\mathbf{M}(p, q))^{-1} = \frac{\mathbf{L}(p, q)}{\det \mathbf{M}(p, q)}.$$

$\mathbf{L}(p, q)$  – присоединенная матрица

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} (p^2 + q^2 - \omega^2 \zeta_0)(\eta_0 + p^2) & -i\omega \gamma_0(\eta_0 + p^2) & pq(p^2 + q^2 - \omega^2 \zeta_0) \\ i\omega \gamma_0(\eta_0 + p^2) & (q^2 - \omega^2 \zeta_0)(\eta_0 + p^2) - p^2 q^2 & i\omega \gamma_0 pq \\ pq(p^2 + q^2 - \omega^2 \zeta_0) & -i\omega \gamma_0 pq & (q^2 - \omega^2 \zeta_0)(q^2 + p^2 - \omega^2 \zeta_0) - \omega^2 \gamma_0^2 \end{pmatrix}.$$

# Борновское приближение

В данной работе мы ограничимся лишь первым порядком метода последовательных приближений – борновским приближением.

$$\begin{aligned} r(p) &= -\frac{i}{|\mathbf{a}^{(1)}|^2} \left( \mathbf{a}^{(1)}(p), \frac{\mathbf{L}(p, q_r(p))}{2q_r(p)(q_r^2 + q_i^2)\eta_0} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, q_r(p_1) + q_r(p)) C^{inc}(p_1) \mathbf{a}^{(2)}(p_1) \right) \equiv \\ &\int \frac{dp_1}{2\pi} Tr^{21}(p, p_1) \delta n(p - p_1, q_r(p_1) + q_r(p)) C^{inc}(p_1), \\ t(p) &= C^{inc}(p) - \frac{i}{|\mathbf{a}^{(2)}|^2} \left( \mathbf{a}^{(2)}(p), \frac{\mathbf{L}(p, -q_r(p))}{2q_r(p)(q_r^2 + q_i^2)\eta_0} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, q_r(p_1) - q_r(p)) C^{inc}(p_1) \mathbf{a}^{(2)}(p_1) \right) \equiv \\ &C^{inc}(p) + \int \frac{dp_1}{2\pi} Tr^{22}(p, p_1) \delta n(p - p_1, q_r(p_1) - q_r(p)) C^{inc}(p_1). \end{aligned}$$

# Ослабление интенсивности

С помощью полученных формул можно рассчитать насколько ослабляется падающий сигнал, локализованный в области  $p \sim p_0$ , за счет рассеяния

$$\Delta S = \left\langle \int_{p \sim p_0} \frac{dp}{2\pi} (|t(p)|^2 - |C^{inc}(p)|^2) v_2(p) \right\rangle$$

Предполагая флуктуации плотности стационарными по  $x$  получим следующий результат

$$\langle \delta n^*(p_1, q) \delta n(p_2, q) \rangle = w(p_1, q) \delta(p_1 - p_2)$$

$$\Delta S \simeq - \frac{W(p_0)}{v_2(p_0)} S_z^{inc};$$

где  $W(p_0)$  – выражается через введенные выше величины

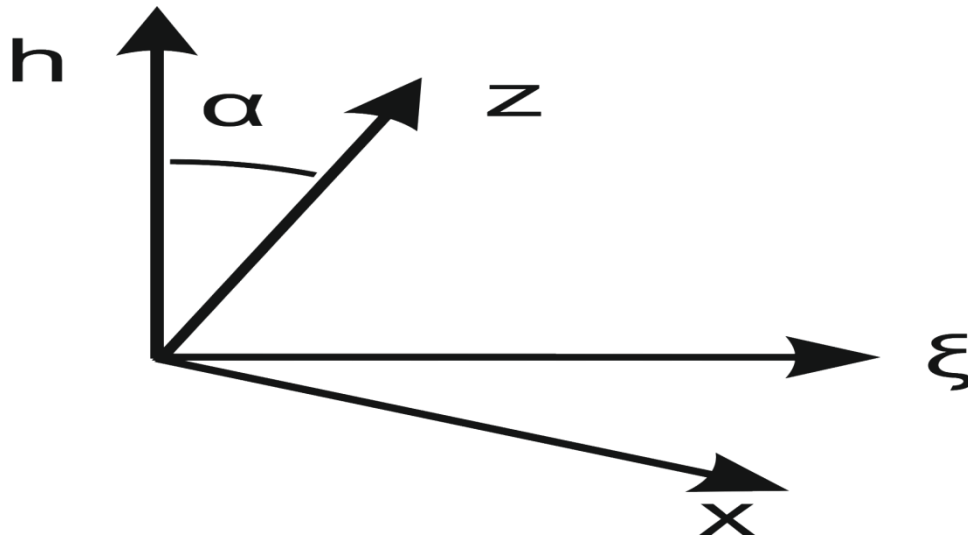
$$W(p_0) = \int \frac{dp}{2\pi} v_2(p) \left[ |Tr^{22}(p, p_0)|^2 w(p - p_0, q_r(p_0) - q_r(p)) + |Tr^{21}(p, p_0)|^2 w(p - p_0, q_r(p_0) + q_r(p)) \right].$$

# Рассеяние в конус прохождения

Для того, чтобы найти какая часть энергии падающей волны уходит в конус прохождения и, соответственно, доходит до Земли, вычислим соответствующий поток энергии

$$S_h^{cone} \simeq 2 \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\pi} \frac{|Tr^{22}(p_{out}, p_0)|^2}{|d'_p(p_{out}, 0)|^2} w(p_{out} - p_0, q_r(p_0) - q_r(p_{out})) \frac{v_2^{(h)}(p_{out})}{v_2(p_0)} S_z^{inc}(p_0);$$

$$p_{out} : d(p, 0) = p \cos \alpha - q_r(p) \sin \alpha = 0;$$



# Параметры плазмы и неоднородностей, использовавшиеся в расчётах

*Широта  $\sim 70^\circ$ ; высота  $\sim 300\text{ km}$  (F2);*

*$\omega_p = 647\text{ kHz}$ ;  $\omega_c = 1680\text{ kHz}$ ;  $M_{\text{eff}} = 25891$ ;  $\omega = 10\text{ kHz}$ .*

*$w(p, q) = \langle \delta n^2 \rangle w_p(p) w_q(q)$ ,  $\langle \delta n^2 \rangle = 0.04$ ;*

*$w_q(q) = C_q \exp(-q^2 / \sigma_q^2)$ ,  $1 / \sigma_q = 10\text{ km}$ ;*

*$w_p(p) = C_p^G \left\{ \exp(-(p - K_p)^2 / 2\sigma_p^2) + \exp(-(p + K_p)^2 / 2\sigma_p^2) \right\}$  – Gaussian;*

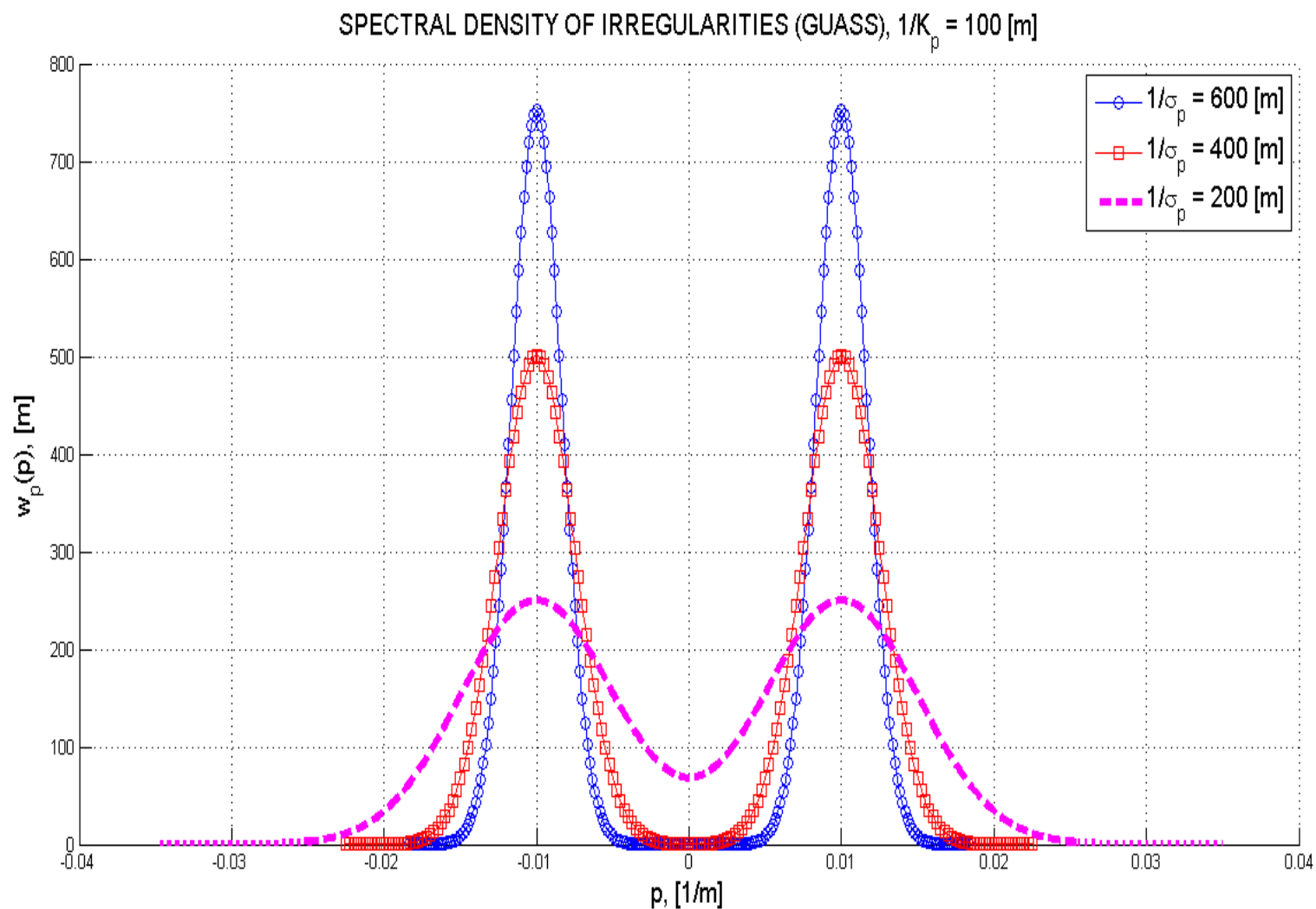
*$w_p(p) = C_p^{pl} \exp(-L_{\text{cut}} \cdot KPL_p^2 / p^2) \left\{ 1 + p^2 / KPL_p^2 \right\}^{-\nu/2}$  – Power law,  $\nu = 3$ .*

---

Costa, E., R.P. Eurico, L.F.C. Rezende, K.M. Groves, P.A. Roddy, E.V. Dao, and M.C. Kelley, (2011), Equatorial scintillation calculations based on coherent scatter radar and C/NOFS data, Radio Sci., 46, RS2011, doi:10.1029/2010RS004435.

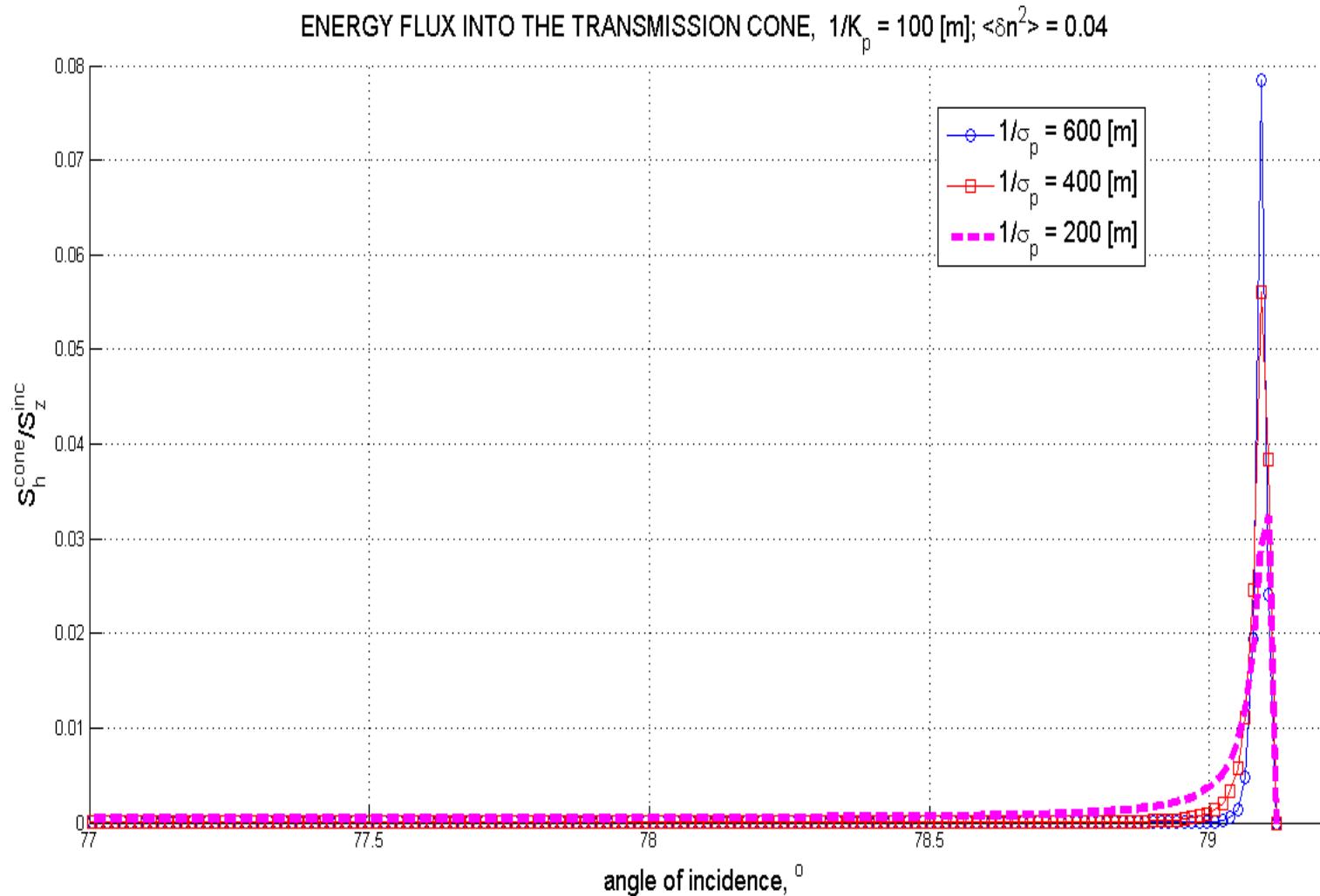
Herman, J.R., (1966), Spread F and Ionospheric F-Region Irregularities, Reviews of Geophysics, 4,2, pp. 255–299.

# Распределение Гаусса. Метровые неоднородности





# Распределение Гаусса. Зависимость рассеяния в конус прохождения от угла падения



# Причины столь резкой зависимости от угла падения

*Оптимальный угол падения определяется соотношением*

$$|p_0 - p_{out}| \sim K_p;$$

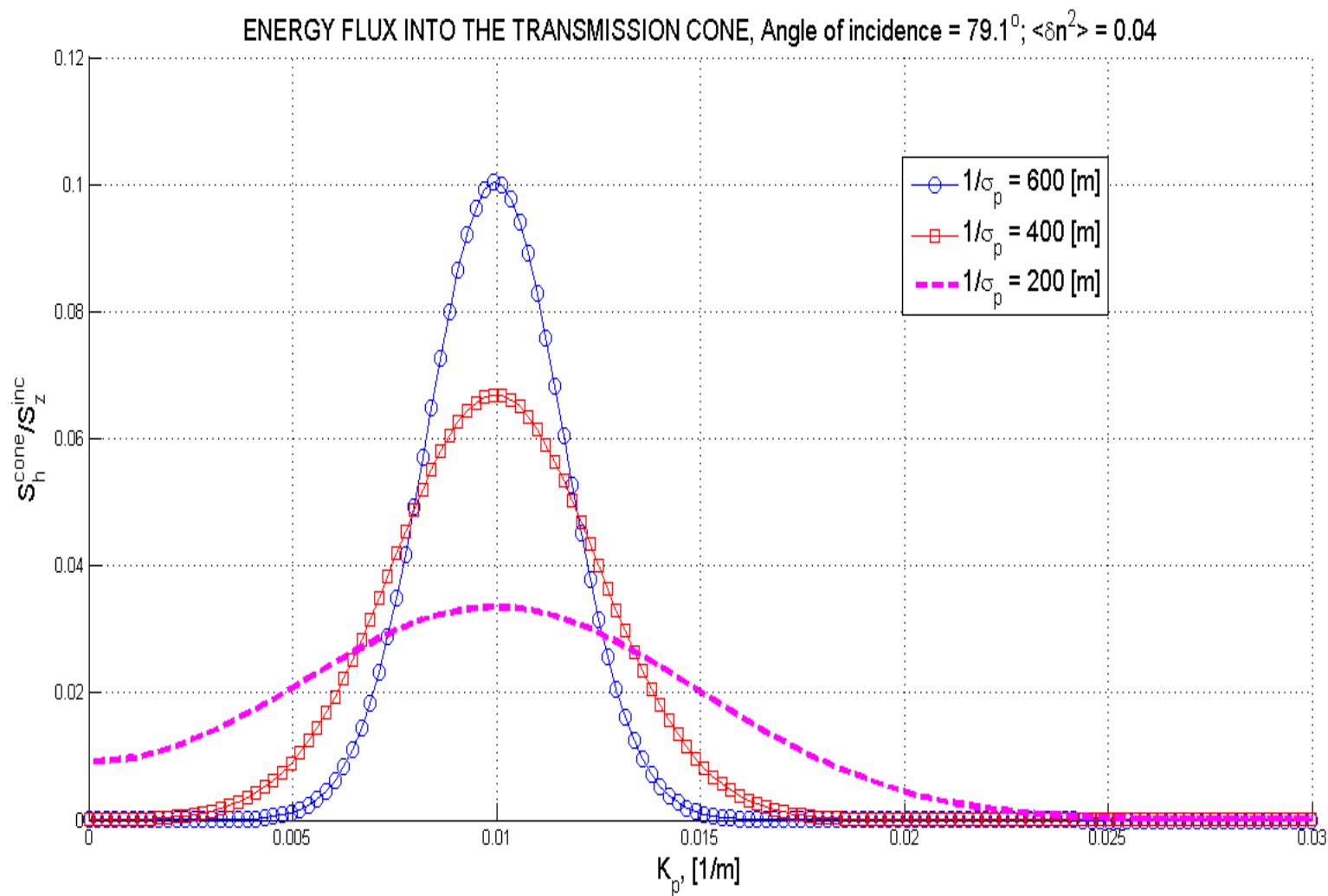
*но для метровых неоднородностей это очень большие  $p_0$ :*

$$p_0^2 + q_r^2(p_0) \gg \eta_0, \text{ но тогда}$$

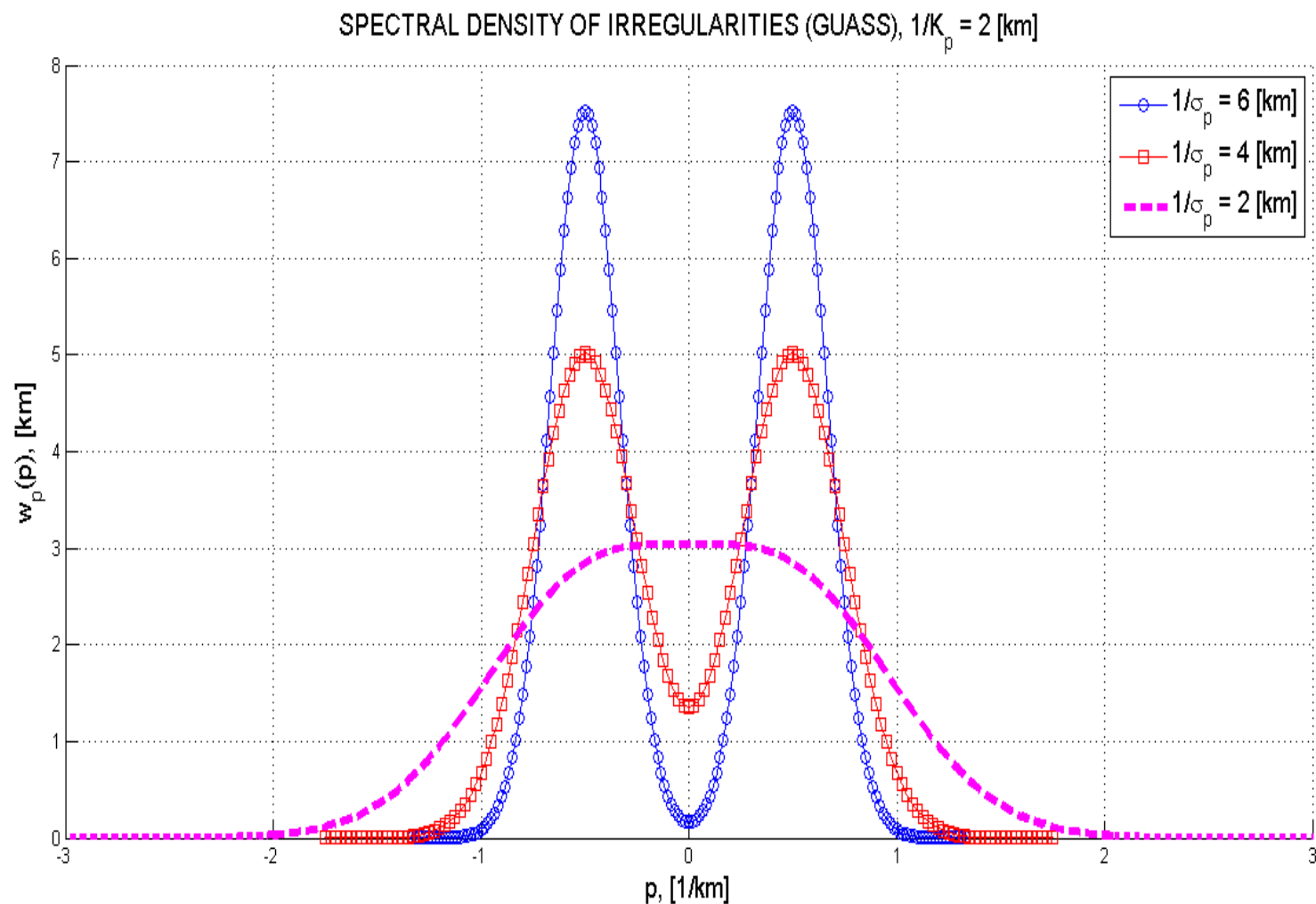
$$q_r(p_0) \sim \sqrt{\zeta_0 / \eta_0} p_0 - \text{линейная функция!}$$

Поэтому для таких больших значений  $p_0$  угол падения не меняется при изменении  $p_0$ . И для того, чтобы изменить угол существенно, нужно далеко отойти от оптимального  $p_0$ .

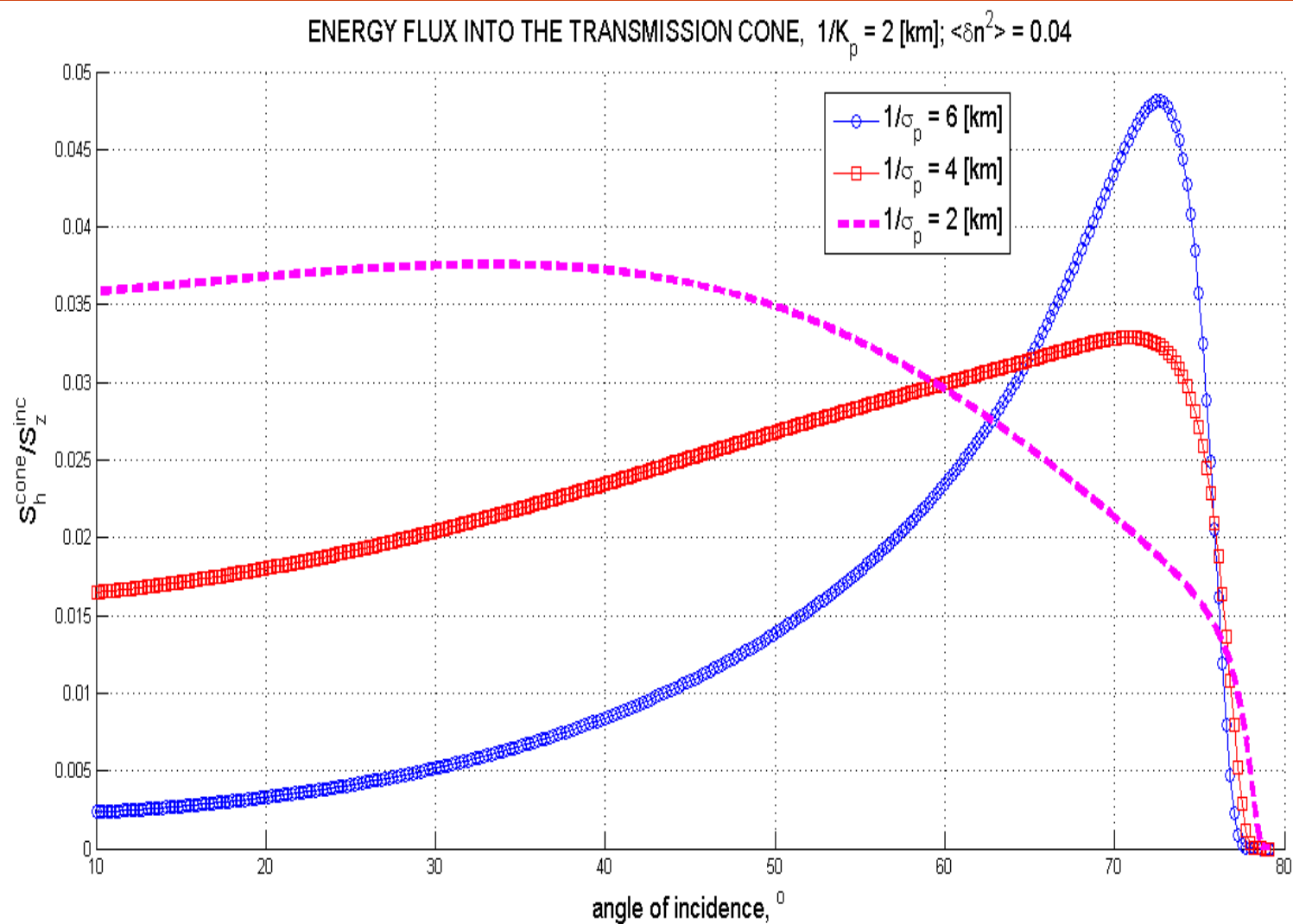
# Распределение Гаусса. Различные масштабы неоднородностей



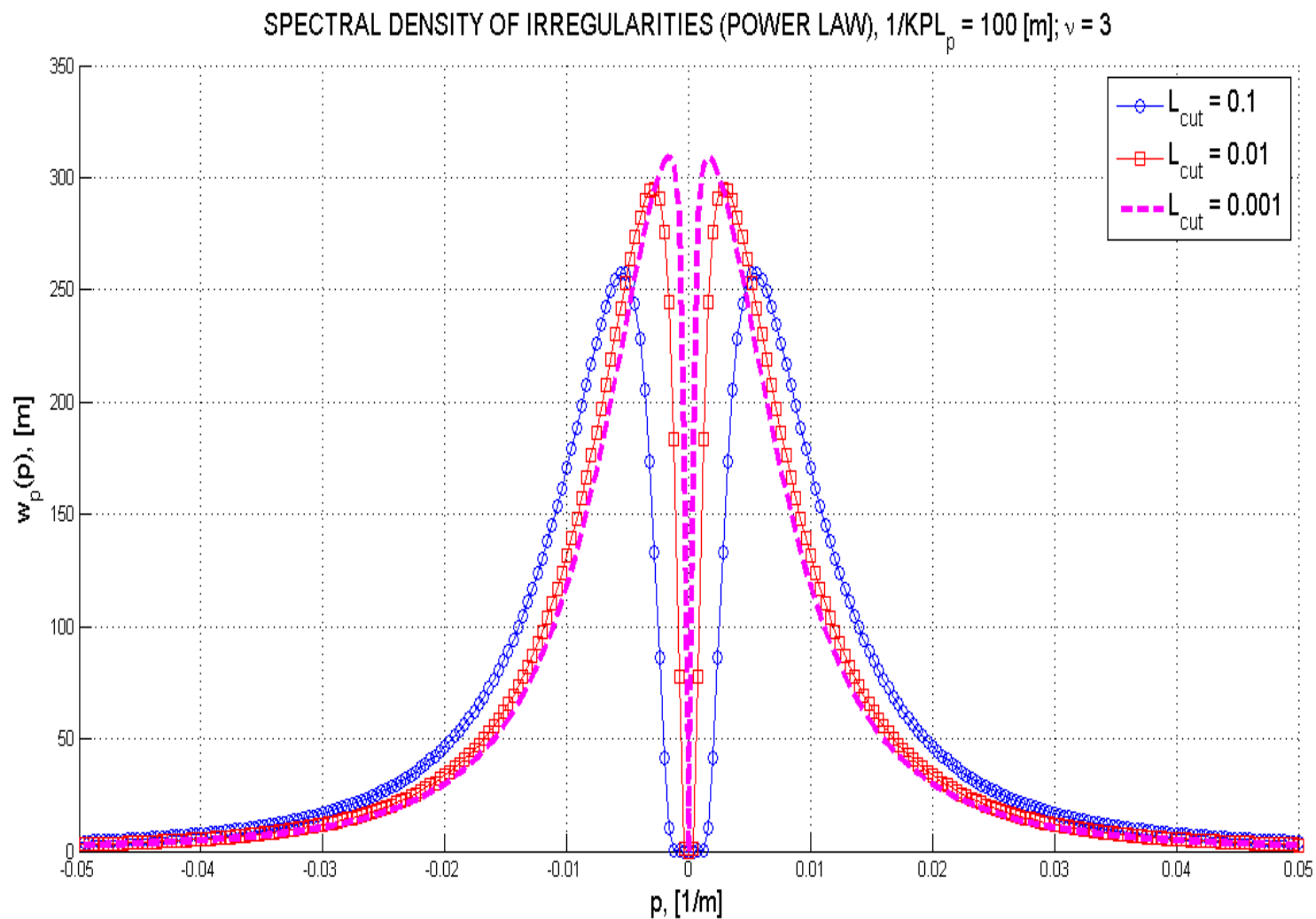
# Распределение Гаусса. Километровые неоднородности



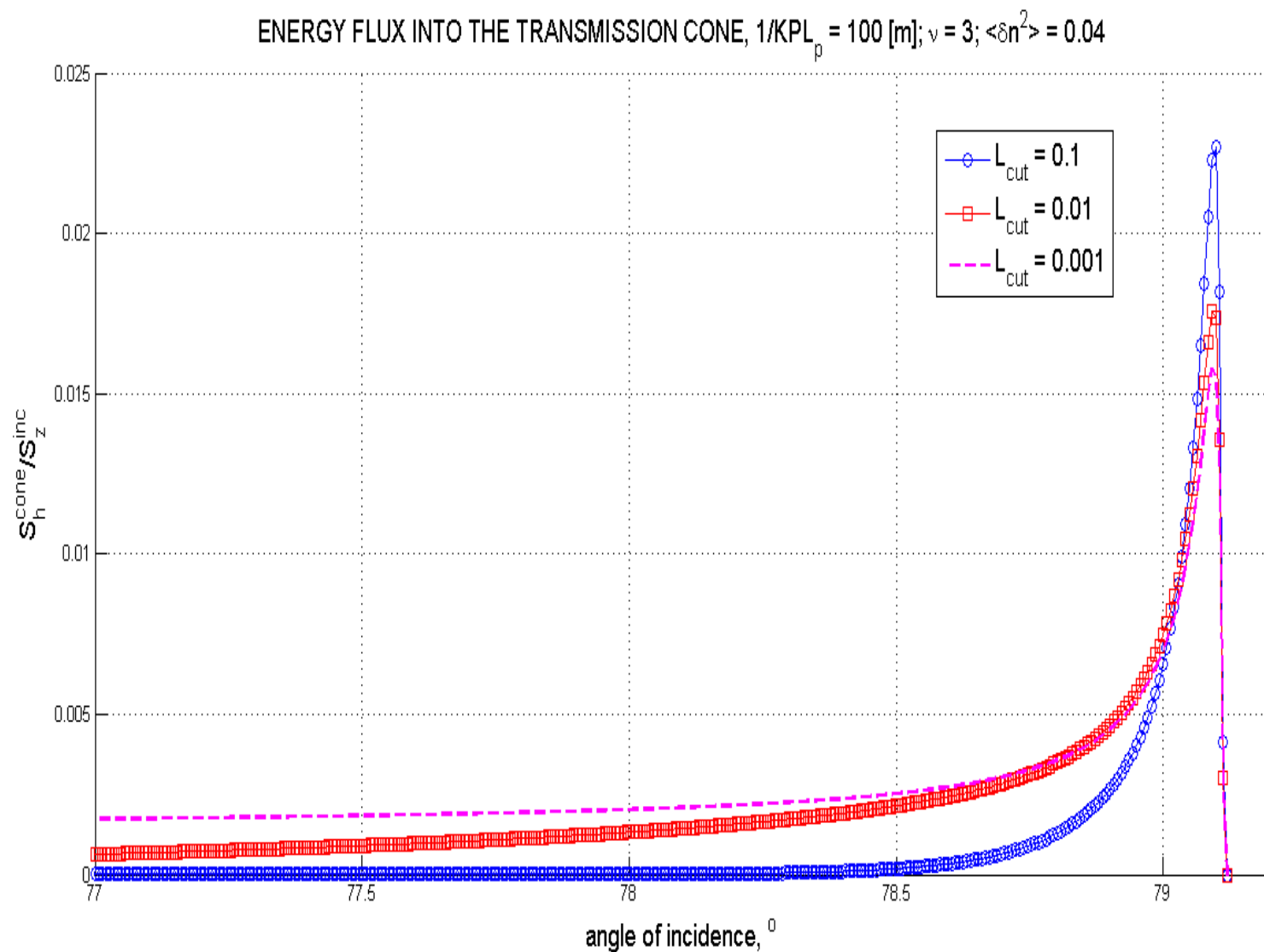
# Распределение Гаусса. Зависимость от угла падения в случае километровых неоднородностей



# Степенное распределение



# Степенное распределение. Зависимость от угла падения



# Борновский ряд

Коэффициенты прохождения и отражения можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} r(p) &= -\frac{i}{|\mathbf{a}^{(1)}|^2} \left( \mathbf{a}^{(1)}(p), \frac{\mathbf{L}(p, q_r(p))}{2q_r(p)(q_r^2 + q_i^2)\eta_0} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, q_r(p) - q_1) \mathbf{A}(p_1, q_1) \right); \\ t(p) &= C^{inc}(p) - \frac{i}{|\mathbf{a}^{(2)}|^2} \left( \mathbf{a}^{(2)}(p), \frac{\mathbf{L}(p, -q_r(p))}{2q_r(p)(q_r^2 + q_i^2)\eta_0} \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, -q_r(p) - q_1) \mathbf{A}(p_1, q_1) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

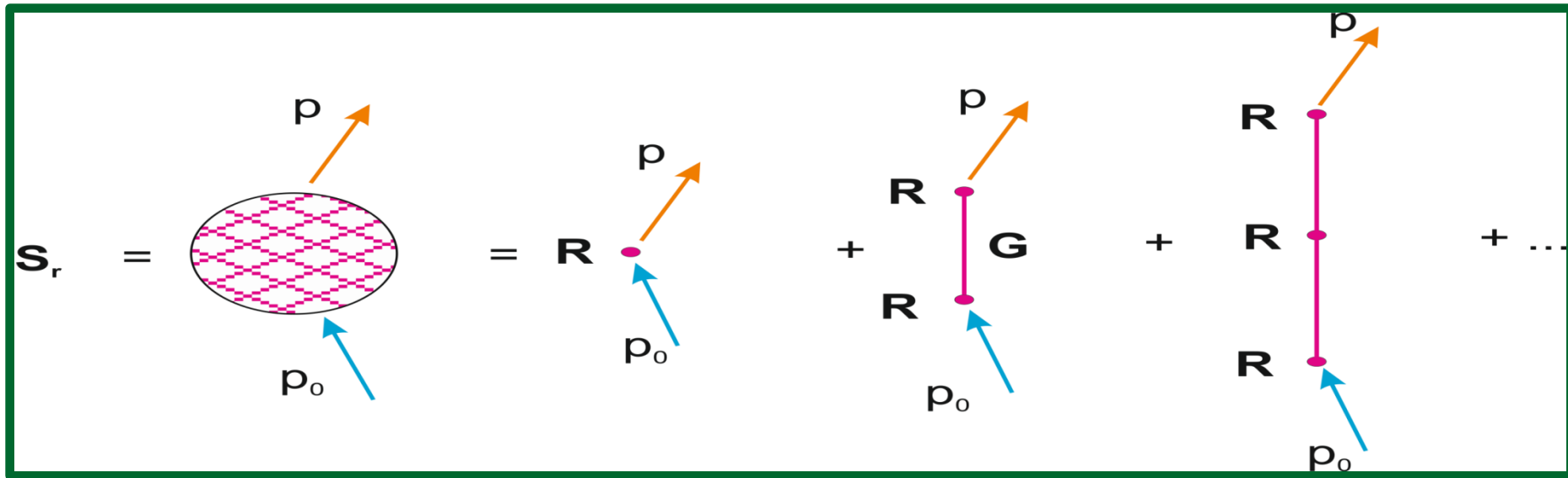
Будем решать интегральное уравнение для поля (3) методом последовательных приближений, взяв в качестве падающей волны плоскую с волновым вектором  $(p_0, -q_r(p_0))$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p_1, q_1) &= \mathbf{S}(p_1, q_1) \mathbf{a}^{(2)}(p_0); \quad \mathbf{S}(p_1, q_1) = \mathbf{1} \delta(p_1 - p_0) \delta(q_1 + q_r(p_0)) + \mathbf{G}(p_1, q_1) \mathbf{R}(p_1 - p_0, q_1 + q_r(p_0)) + \\ &+ \mathbf{G}(p_1, q_1) \int \frac{dp_2}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} \mathbf{R}(p_1 - p_2, q_1 - q_2) \mathbf{G}(p_2, q_2) \mathbf{R}(p_2 - p_0, q_2 + q_r(p_0)) + \dots; \\ r(p | p_0) &= -\frac{i}{|\mathbf{a}^{(1)}|^2} \left( \mathbf{a}^{(1)}(p), \frac{\mathbf{L}(p, q_r(p))}{2q_r(p)(q_r^2 + q_i^2)\eta_0} \mathbf{S}_r \mathbf{a}^{(2)}(p_0) \right); \quad \mathbf{S}_r \equiv \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, q_r(p) - q_1) \mathbf{S}(p_1, q_1). \end{aligned}$$



# Графическое представление борновского ряда

Для матрицы  $S_r$  можно получить следующее удобное графическое представление



дающее простую физическую интерпретацию каждому члену борновского ряда и позволяющее достаточно просто считать слагаемые высоких порядков. Например, для Члена третьего порядка отсюда следует такое выражение

$$\int \frac{dp_2}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dq_1}{2\pi} \mathbf{R}(p - p_1, q_r(p) - q_1) \mathbf{G}(p_1, q_1) \mathbf{R}(p_1 - p_2, q_1 - q_2) \mathbf{G}(p_2, q_2) \mathbf{R}(p_2 - p_0, q_2 + q_r(p)) ;$$

# Заключение

В работе рассмотрена задача о рассеянии свистовой волны с произвольным направлением вектора волновой нормали на занимающем конечную область пространства слое с мелкомасштабными неоднородностями.

Предложен новый подход к решению этой задачи, основанный на использовании функции Грина и сведении дифференциального уравнения к интегральному, что существенно облегчает применение метода последовательных приближений.

Получено решение уравнений Максвелла в борновском приближении, определены коэффициенты отражения и прохождения волны.

Рассчитано ослабление интенсивности падающего сигнала за счет рассеяния.

Получено выражение для рассеяния в конус прохождения, связывающее плотность потока энергии волн, рассеянных в конус прохождения, т.е. выходящих на Землю с плотностью потока энергии падающей волны.

# Список литературы

- R.A. Helliwell, *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*, Stanford, California: Stanford University Press, 1965.
- K.G. Budden, *The Propagation of Radio Waves*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
- S.N. Antani, D.J. Kaup, *Whistler scattering from density fluctuations in magnetized plasma*, Phys. Fluids, 27(5), 1984.
- D.M. Simonich, K.C. Yeh, *A theory of scattering from irregularities in a magneto-ionic medium*, Radio Science, 7, 2, p 291, 1972.
- D.R. Shklyar, H. Washimi, *LHR wave excitation by whistlers in the magnetospheric plasma*, J. Geophys. Res., 99, 23,695, 1994.
- D.R. Shklyar, I. Nagano, *On VLF wave scattering in plasma with density irregularities*, J. Geophys. Res., 103, 29,515-29,526, 1998.

Спасибо за внимание!